Funções de uma variável Complexa	**Lista 04**
Derivada complex	tarcisio@member.ams.org
Prof. T. Praciano-Pereira	**Dep. de Matemática**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú	30 de janeiro de 2008
Documento escrito com LaTeX - sis. op. Debian/Gnu/Linux	

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção caso você entregue pelo método medieval. Se você quiser entregar o trabalho eletrônicamente, acesse a página dadisciplina

http://varcom.sobralmatematica.org

e procure o link "entrega de trabalhos". Por favor, siga as instruções sobre nomes de arquivos:

`disc_curso_seunome_XX.pdf`

em que disc_curso identifica seu curso e a disciplina que você faz comigo:

$$curso \in \{num\_edo, num\_mat, num\_com, edo\_mat, edo\_eng, varcom\}$$

de acordo com a sua matrícula na disciplina, `XX` é `07` para esta lista, e `pdf` é o tipo de formatação que você der ao seu trabalho.

Data da entrega da lista: dia 06 de Fevereiro, quarta-feira.

0.1 Orientação

objetivo: Derivação complexa de funções de variável complexa.

palavras chave: derivada complexa,equações de Cauchy-Riemann, função análitica, transformação linear complexa.

Nesta lista eu vou começar os trabalhos como se estivessemos no início do semestre, considerando a perturbação ocasionada pela greve. O assunto que vou considerar permite partir do que foi feito antes da greve como conhecimento preliminar e você terá condições de fazer uma revisão ao mesmo tempo que avançaremos.

Vamos estudar as derivadas das funções complexas.

Uma função complexa, de variável complexa, pode ser entendida como uma função

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \ ; \ f = (u, v) \tag{1}$$

uma função que tem duas componentes, u, v cada uma delas uma função real de variável real. O que vamos aprender nesta lista é que o conjunto das funções reais bivariadas que podem ser consideradas *complexas* é um subconjunto próprio de todas as funções bivariadas. Vamos descobrir a condição *Cauchy Riemann*, chamadas *equações de Cauchy-Riemann* que caracterizam quais são as funções vetoriais de duas variáveis que podem ser consideradas *de variável complexa*.

O método que vamos usar para chegar a esta caracterização é o estudo das *transformações lineares* do $\mathbf{R}^2$ que podem ser vistas como *transformações lineares* de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{C}$, cairemos na condição de *Cauchy-Riemann*. Ora, como as funções derivadas tem uma *transformação linear* tangente, vamos conseguir usar esta caracterização das *transformações lineares* para definir o que é função complexa com derivada complexa. Estas funções se chamam *analíticas*.

0.2 Exercícios

Exercícios 1 *Derivação complexa*

1. *Escreva cada uma das seguintes funções complexas como um par de funções reais:*

$f(z) =$	$f(z) =$
a)z	b) z^2
c)e^z	d) z^2
e)$sen(z)$	f) $cos(z)$
g) $\frac{1}{z}$	h) $\overline{z}$

2. *Função linear complexa*

   (a) *No espaço vetorial complexo $\mathbf{C}$, mostre que uma função definida por*

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \ ; \ f(z) = w_0 z$$

em que $w_0 = a+bi$ é um número complexo dado, é uma função linear, (verifique as propriedades).

(b) *Escreva a matriz da função linear definida acima, agora considerando-a como função linear de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$, use a notação $w_0 = a + bi$ e caracteriza as relações entre a, b.*

(c) *Equações de Cauchy-Riemann No item anterior você chegou ao resultado seguinte: o conjunto das transformações lineares de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ que podem ser vistas como transformações lineares $\mathbf{C}$ em $\mathbf{C}$ em um subconjunto próprio do universo de todas as transformações lineares. Redija de maneira clara este resultado (escreva um teorema).*

3. *Verifique quais das funções definidas abaixo poderia ser uma função complexa de variável complexa:*

$f(x, y) =$	$f(x, y) =$
a)$(x^2 - y^2, 2xyi)$	b) $(x^2, y^2$
c)(x, y)	d) $(x, -y)$

4. *Derivada Considere cada uma das funções abaixo. Escreva a expressão de cada uma delas como função $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ e calcule as suas jacobianas (matriz das derivadas parciais). Sugestão, escreva $z = x + iy$*

$f(z) =$	$f(z) =$	$f(z) =$
a)z	b) z^2	$\overline{z}$
c)e^z	d) z^2	$Re(z)$
e)$sen(z)$	f) $cos(z)$	$Im(z)$

5. *Em cada uma das derivadas, no item anterior, verifique quando as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas.*

6. *Poderiamos dizer que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas sempre que tivermos "autênticas" funções complexas, definidas por operações "aritméticas" sobre os números complexos? Verifique isto e tente fazer uma pequena redação a respeito. Procure a definição de função análitica, por exemplo em [8] e complete sua redação.*

Referências Bibliográficas

[1] Tom M Apostol
Calculus Blaisdell Publishing Company - 1962
ou um outro livro qualquer de Cálculo

[2] Thomas Williams, Colin Kelley and many others
Gnuplot: Um programa para fazer gráficos
http://www.gnuplot.info
Distribuido livremente.

[3] Lang, Serge *Estruturas Algébricas*
ou um outro livro qualquer de Álgebra

[4] Nachbin, Leopoldo -
Introdução à Álgebra
ou um outro livro qualquer de Álgebra

[5] Schetchman, W. et alli
`Maxima` Um programa de computação algébrica
http://www.maxima.org
Distribuido sob `GPL`

[6] Praciano-Pereira, T *Cálculo Avançado* - Publicação Preliminar - Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS - 1998
http://www.4shared.com/file/18104572/4d05bd7e/avancado.html

[7] Grupo do Scilab no INRIA
`Scilab` Um programa para fazer Álgebra Linear computacionalmente - Cálculo Numérico
http://www.scilab.org
Distribuido sob `GPL`

[8] *A enciclopédia livre na Internet*
http://pt.wikepedia.org http://www.wikipedia.org