

**Exercícios 1** *O plano complexo objetivo: Conduzi-l@ a dominar as operações elementares com números e funções definidas em C. Parte significativa deste trabalho é a representação gráfica dos números complexos, sendo bem feita @ conduzir@ a uma intuição significativa sobre estes números.*

*A lista está estruturada como um tutorial, cada questão contribui para uma compreensão da que vem depois.*

*As questões discursivas tem o objetivo conduzi-l@ a ser um@ autor@ de textos matemáticos. Escreva livremente.*

*Eu vou usar apoio computacional e vou incluir os programas utilizados dentro do texto. Além disto você encontra os programas em [8] de onde você baixá-los e portanto completar a sua cultura em programação lendo os programas, rodando-os, e voltando a lê-los. Tudo que for utilizado é domínio público que pode ser obtido na Internet gratuitamente.*

**palavras chave:** representação geométrica dos complexos, forma polar, conjugado, inverso, funções polinômiais, gnuplot, python.

### 1. produto

**Solução 1** (a) *Vou logo fazer a segunda parte da questão, porque ela conduz a uma fórmula. Tendo a fórmula eu posso escrever um programa em alguma linguagem de programação e automatizar as contas, o que vou fazer em seguida.*

*Calcule o produto dos números complexos*

$$z = \alpha + i\beta ; w = \gamma + i\delta \quad (1)$$

*e escreva a fórmula do produto mostrando como obter a parte real e a parte imaginária.*

$$zw = (\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta) = \quad (2)$$

$$= \alpha\gamma + i\alpha\delta + i\beta\gamma + \beta\delta i^2 = \quad (3)$$

$$= \alpha\gamma + i\alpha\delta + i\beta\gamma + \beta\delta(-1) = \quad (4)$$

$$= (\alpha\gamma - \beta\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma) \quad (5)$$

*Podemos usar esta fórmula para automatizar as contas.*

(b) *Automatizando agora as contas:*

*A linguagem de programação python tem alguma semelhança sintática com Pascal e é livremente distribuída. Você pode ignorar esta parte*

*da resposta (a parte de programação), ou fazer algum esforço para entender o programa.*

*Pode simplesmente rodar o programa baixando o compilador do python, [6] e rodar o programa com*

```
python complexos.py
```

*Você encontra este programa em [8, complexos.py].*

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf8 -*-

from sys import *

def produto(a,b,c,d):
    return (a*c-b*d,a*d+b*c)

a1=input('A parte real a1 = ? ')
b1=input('A parte imaginária b1 = 1 ? ')

print '-----\n'

a2=input('A parte real a2 = ? ')
b2=input('A parte imaginária b2 = ? ')

a3=0; b3=0;

(a3,b3) = produto(a1,b1,a2,b2)

if (b1 < 0):
    resposta = '('+str(a1)+' '+str(b1)+' i)'
else:
    resposta = '('+str(a1)+' + '+str(b1)+' i)'
if (b2 < 0):
    resposta = resposta +'('+str(a2)+' '+str(b2)+' i)'
else:
    resposta = resposta +'('+str(a2)+' '+str(b2)+' i)'
if (b3 < 0):
    resposta = resposta + ' = ('+str(a3)+' '+ str(b3)+'i) \n'
else:
    resposta = resposta + ' = ('+str(a3)+' + '+ str(b3)+'i) \n'
stdout.write(resposta)
```

*Algumas das multiplicações com este programa:*

complexos.py

```

A parte real a1 = ? 2
A parte imaginária b1 = 1 ? 3

A parte real a2 = ? 2
A parte imaginária b2 = ? -3
(2 + 3 i)(2 -3 i) = (13 + 0i)
=====
A parte real a1 = ? 0
A parte imaginária b1 = 1 ? 1

A parte real a2 = ? 2
A parte imaginária b2 = ? 3
(0 + 1 i)(2 +3 i) = (-3 + 2i)
=====
A parte real a1 = ? 0
A parte imaginária b1 = 1 ? 1

A parte real a2 = ? 0
A parte imaginária b2 = ? -1
(0 + 1 i)(0 -1 i) = (1 + 0i)
=====

```

## 2. representação geométrica

(a) Represente geométricamente os números complexos

$$\begin{matrix} i & -i & 1+i & 1-i \\ 2+3i & 2-3i & -2+3i & -2-3i \end{matrix} \quad (6)$$

(b) Desenhe o círculo unitário e marque a projeção de cada um dos números complexos acima no círculo unitário. Calcule o arco determinado por cada um destes números e o seu módulo.

**Solução 2** Vou usar gnuplot e o comando

```
set arrow from a,b rto c,d
```

aplicado em cada um dos números complexos acima. Este comando do gnuplot traça um segmento de reta entre os dois pontos indicados, desde "from" até "rto". Ele possui diversas etiquetas, uma delas head que produz a ponta da flecha. Você encontra este programa em [8].

Para conseguir o círculo unitário, eu vou usar duas funções,

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}; f_2(x) = -\sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

Porém estas funções não estão definidas para  $|x|$  maior do que 1. gnuplot não se incomodaria com isto mas o gráfico ficaria restrito ao intervalo

$[-1, 1]$  e como temos números complexos que fogem deste domínio restrito, então, em cada caso eu vou estender as funções com zero fora do intervalo  $[-1, 1]$ . A re-definição da equação (7) fica assim, em Matemática,

$$f_1(x) = \begin{cases} \text{se } x \leq -1 & 0 \\ \text{ou então se } x \in (-1, 1) & \sqrt{1-x^2} \\ \text{ou então se } x \geq 1 & 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \text{se } x \leq -1 & 0 \\ \text{ou então se } x \in (-1, 1) & -\sqrt{1-x^2} \\ \text{ou então se } x \geq 1 & 0 \end{cases} \quad (9)$$

Esta é uma estrutura lógica do tipo if() else que pode ser implementada em gnuplot usando a estrutura de controle de fluxo

```
condicao ? equacao1 : equacao2
```

$$f_1(x) = (x <= -1)?0 : (x < 1)?\sqrt{1-x**2}:0 \quad (10)$$

$$f_2(x) = (x <= -1)?0 : (x < 1)?-\sqrt{1-x**2}:0 \quad (11)$$

O resultado é o script do gnuplot

```

set xrange [-4:4]
set yrange [-4:4]
set arrow from 0,0 rto 0,1
set arrow from 0,0 rto 0,-1
set arrow from 0,0 rto 1,1
set arrow from 0,0 rto 1,-1
set arrow from 0,0 rto 2,3
set arrow from 0,0 rto 2,-3
set arrow from 0,0 rto -2,3
set arrow from 0,0 rto -2,-3
f1(x) = (x<=-1)?0:(x<1)?sqrt(1-x**2):0
f2(x) = (x<=-1)?0:(x<1)?-sqrt(1-x**2):0
set terminal postscript portrait enhanced color
set output 'exer01_01_01.eps'
plot 0, f1(x), f2(x)
print 'Aperte enter para finalizar'
pause -2

```

e você pode ver na figura (1) página 5, o gráfico feito por gnuplot seguindo o script acima.

## 3. notação de Euler

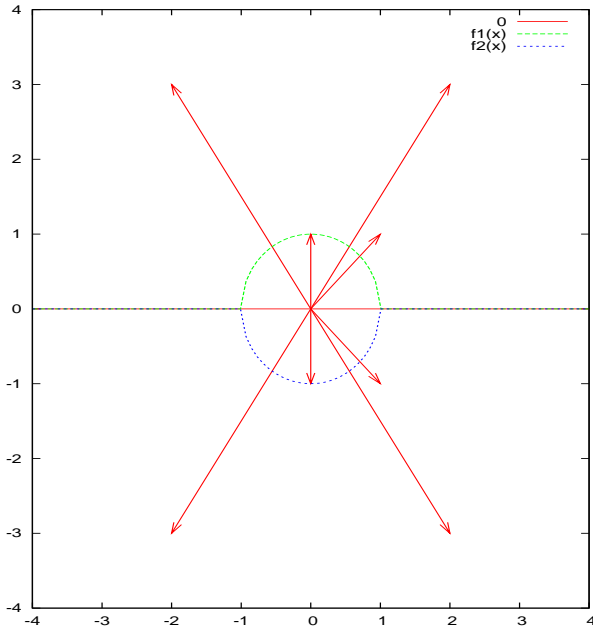


Figura 1: Números complexos e o círculo unitário

#### 4. notação de Euler

**Solução 3** Vou incluir parte da solução da próxima questão aqui, o programa `xfig` que pode ser obtido livremente na internet nos permite fazer gráficos “manualmente”

A notação de Euler<sup>1</sup> esta sendo usada aqui como uma etiqueta para cada um dos números complexos

$$\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha) = e^{i\alpha}$$

Na figura (2) página 6, você pode ver o círculo unitário dividido em oito

<sup>1</sup>Usualmente chamada *fórmula de Euler* que pode ser demonstrada usando a fórmula de Taylor das funções  $\operatorname{sen}()$ ,  $\operatorname{cos}()$

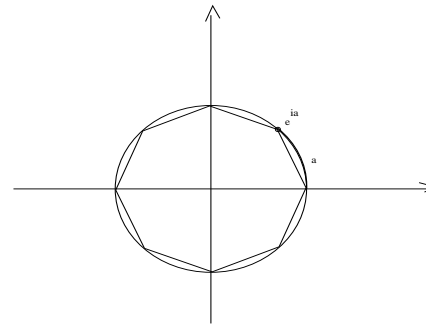


Figura 2: Círculo unitário dividido em oito partes iguais

setores iguais por um octógono, polígono regular convexo de oito lados. Cada um dos vértices corresponde a um dos valores da sucessão aritmética cuja razão é  $\frac{\pi}{4}$ .

Podemos agora definir a adição por congruência nesta progressão aritmética de oito termos, a congruência módulo  $2\pi$ , isto, sempre a soma ultrapassar este valor, consideramos o resto na “divisão inteira” por  $2\pi$ . Definida<sup>2</sup> assim esta adição, temos um grupo aditivo comutativo no conjunto  $G$ .

Considere  $\mathbf{S}^1$ , o círculo unitário de centro na origem como sendo o conjunto de todos os números complexos unitários. Desenhe  $\mathbf{S}^1$  e observe que a notação, forma polar,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad (12)$$

identifica qualquer ponto em  $\mathbf{S}^1$  usando como referência a “origem”  $(1, 0)$  e o arco  $\theta$ . Marque os números

$$e^{i\alpha}; \alpha \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right\} \quad (13)$$

Esta identificação é uma função bijetiva

$$\phi(t) = \cos(t) + i\operatorname{sen}(t) = e^{it}$$

entre os elementos da progressão aritmética e os pontos sobre  $\mathbf{S}^1$ . Bastanos agora provar que

<sup>2</sup>Evidentemente que está mal definida, a presença de aspas indicam que o autor confessa o crime, mas alguma coisa tem que ficar para que o leitor complete, a verdade mesmo é que dá trabalho para escrever corretamente este parágrafo...

$$\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y) ; \phi(0) = 1 \quad (14)$$

para que a função  $\phi$  seja um isomorfismo de grupos, entre o grupo aditivo  $G$ , a progressão aritmética, e o grupo multiplicativo formado pelas imagens  $e^{it}$  em  $S^1$ .

Quem prova isto é uma fórmula da trigonometria que vamos admitir.

Se multiplicarmos

$$\phi(s)\phi(t) = \quad (15)$$

$$e^{is}e^{it} = (\cos(s) + i\text{sen}(s))(\cos(t) + i\text{sen}(t)) = \quad (16)$$

$$(\cos(s)\cos(t) - \text{sen}(s)\text{sen}(t)) + i(\cos(s)\text{sen}(t) + \text{sen}(s)\cos(t)) = \quad (17)$$

$$\cos(s+t) + i\text{sen}(s+t) = e^{i(s+t)} = \phi(s+t) \quad (18)$$

$$\phi(0) = 1 \quad (19)$$

a última equação acima diz “o número complexo, cujo argumento é zero, é o número 1”.

5. notação de Euler Considere um número complexo,  $z$ , no plano. Ele determina um círculo com centro na origem.

**Solução 4** (a) Trace o círculo e também  $S^1$ . Verifique que a projeção de  $z$  sobre  $S^1$  determina um ângulo  $\gamma$  e que portanto

$$z = \rho e^{i\gamma} \quad (20)$$

Cada número complexo,  $\underline{z}$ , determinando um ponto do plano, estará ou na parte exterior do círculo unitário ou em seu interior.

Se estiver no interior podemos prolongar o segmento de reta que representa  $\underline{z}$  para cortar a curva do círculo. Se estiver no exterior o segmento de reta que o representa já corta a curva do círculo. Se estiver na curva do círculo também neste caso determina um arco de círculo que vai desde a origem

$$1 = 1 + 0i$$

até este ponto de encontro da reta que contém o número complexo,  $\underline{z}$ .

O arco que o número complexo,  $\underline{z}$  desta forma determina sobre  $S^1$  de forma única, se chama de argumento de  $\underline{z}$ .

Como  $\underline{z}$  também determina um triângulo retângulo então podemos calcular o ângulo, (o argumento) por exemplo com

$$\arg(z) = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

supondo que  $z = x + iy$ . Esta expressão não tem sentido quando considerarmos um ponto sobre o eixo  $OY$  mas podemos extendê-la, para este caso, afirmando que quando tivermos  $z \in i\mathbf{R}$ , for um número complexo imaginário puro, o argumento será

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}.$$

No primeiro caso quando  $z$  for um múltiplo de  $i$ , e no outro caso quando  $z$  for um múltiplo de  $-i$ . Em ambos caso a parte real,  $x$  é zero, o que nos impediria de calcular usando o atan.

Aqui gosto de fazer comparações mostrando as “definições” que nós matemáticos, somos forçados a fazer afim que a teoria fique bem arrumada, um exemplo de situação semelhante, é a definição de  $0!$  que completa a definição que fala de um produto de números num caso em que não há nenhum número para multiplicar... O “ $0!$ ” diz respeito a um conjunto vazio de fatores e se relaciona com os “arranjos” zero-a-zero de um conjunto de  $n$  elementos. Embora isto possa parecer absurdo, é extremamente necessário e prático. Acima estamos extendendo a definição de uma função para falar do argumento dos números complexos que têm a parte real nula.

Na figura (3) página 8, você pode ver os números complexos

$$ci \text{ cujo argumento é } \frac{\pi}{2} \text{ di cujo argumento é } \frac{3\pi}{2} \equiv \frac{-\pi}{2}$$

observe que a equivalência mencionada acima diz respeito a congruência a que já fizemos referência anteriormente.

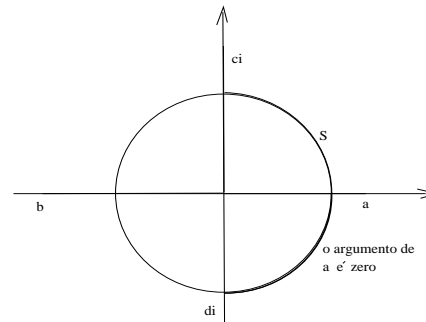


Figura 3: O argumento de um número real é zero ou  $\pi$

(b) Escreva as fórmulas. Explícite  $\rho$  e  $\gamma$ .

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \gamma = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (21)$$

e quando  $x = 0$  o valor de  $\gamma$  será  $\frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{-\pi}{2}$  conforme o número complexo  $z = x + iy$  seja um múltiplo positivo<sup>3</sup> de  $i$  ou de  $-i$ .

(c) Justifique porque o par  $(\rho, \gamma)$  se chama “coordenadas polares de  $z$ ”. Encontre as coordenadas polares dos números complexos. Estas são as coordenadas polares usadas em Cálculo.

$$\begin{matrix} i & -i & 1+i & 1-i \\ 2+3i & 2-3i & -2+3i & -2-3i \end{matrix} \quad (22)$$

(d) Faça uma pequena redação explicando como funciona a forma polar, como, dados  $(\rho, \theta)$  podemos encontrar o ponto  $P$  no plano e vice-versa, como dado um ponto  $P = (x, y)$  podemos encontrar suas coordenadas polares.

Espero que alguém me envie uma redação da qual eu aceite ser coautor para colocar aqui.

#### 6. Vértices do polígono de 8 lados

(a) Verifique que os pontos  $e^{i\alpha}$  na equação (20) determinam um polígono regular convexo de 8 lados inscrito no círculo  $\mathbf{S}^1$ .

**Solução 5** Porque são os pontos determinados por uma progressão aritmética, em que a razão é o arco de círculo  $\alpha$ , então determina uma malha uniforme sobre  $\mathbf{S}^1$  que são os vértices de um polígono regular. O polígono é convexo porque seus vértices se encontram sobre  $\mathbf{S}^1$ .

(b) representação geométrica Verifique que os números complexos identificados pela equação (20), formam um grupo multiplicativo. Faça a tabela de multiplicação usando a notação de Euler. Mostre que existe um isomorfismo de grupos com o grupo aditivo

$$G = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right\} = \mathbf{R}/2\pi \quad (23)$$

em que a adição é feita módulo- $2\pi$ . Faça a tabela de adição do grupo  $(G, +)$ .

**Solução 6** Feita acima com o isomorfismo de grupos.

7. Polígono de 5 lados Encontre um polígono de 5 lados inscrito em  $\mathbf{S}^1$ , que determine um grupo multiplicativo de números complexos. Exiba o grupo aditivo que lhe é isomorfo.

8. Polígono de 9 lados Encontre um polígono de 9 lados inscrito em  $\mathbf{S}^1$ , que determine um grupo multiplicativo de números complexos. Exiba o grupo aditivo que lhe é isomorfo.

9. Polígono de  $n$  lados Descreva os vértices de um polígono de  $n$  lados inscrito em  $\mathbf{S}^1$ , que determine um grupo multiplicativo de números complexos. Exiba o grupo aditivo que lhe é isomorfo.

10. Raízes da unidade Verifique que em todos os polígonos inscritos em  $\mathbf{S}^1$ , nas questões anteriores, os vértices elevados ao “número de lados” é igual 1, e, reciprocamente, qualquer vértice é uma das raízes  $n$ -ésima da unidade em que  $n$  é o número de vértices.

11. Raízes da unidade Encontre, geometricamente, todas as raízes  $\sqrt[n]{1}$ . Descreva algebricamente as raízes encontradas. Sugestão: use a notação de Euler.

12. Calcule a imagem  $f(z)$  com

$$f(z) = 1 + 2z + z^2 \quad (24)$$

$$\begin{matrix} z = i & z = -i & z = 1+i & z = 1-i \\ z = 2+3i & z = 2-3i & z = -2+3i & z = -2-3i \end{matrix} \quad (25)$$

13. Calcule a imagem  $f(z)$  com

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad (26)$$

$$\begin{matrix} z = i & z = -i & z = 1+i & z = 1-i \\ z = 2+3i & z = 2-3i & z = -2+3i & z = -2-3i \end{matrix} \quad (27)$$

Calcule  $f(z)$  quando  $z = a + bi$  e discuta quando é impossível calcular a imagem.

Faça uma pequena redação com o título “inverso multiplicativo de números complexos”.

14. Resolva as equações (justifique todas as passagens):

$$3 + z = 4 + 2i \quad (28)$$

$$(3 + 2i)z + 5 - 3i = 7 - i \quad (29)$$

$$z^2 + 2z + 3 = 0 \quad (30)$$

$$z^3 + 3z^2 + 5z = 0 \quad (31)$$

15. Considere um polinômio  $P$  a coeficientes reais. Mostre que se  $P(z) = 0$  então  $P(\bar{z}) = 0$ , em outras palavras, se  $z$  for uma raiz de  $P$  então o seu conjugado  $\bar{z}$  também será uma raiz.

<sup>3</sup>Fica para o leitor definir melhor o que significa múltiplo positivo....

16. Considere  $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$  um polinômio a coeficientes complexos. Desenvolva a expressão de  $P$  considerando

$$a_0 = u_0 + v_0 ; a_1 = u_1 + v_1 ; a_2 = u_2 + v_2 ; z = x + iy \quad (32)$$

e encontre a expressão das partes reais e imaginárias de  $P$  tal que

$$P(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

## Referências Bibliográficas

- [1] Tom M Apostol  
*Calculus* Blaisdell Publishing Company - 1962  
ou um outro livro qualquer de Cálculo
- [2] Thomas Williams, Colin Kelley and many others  
*Gnuplot: Um programa para fazer gráficos*  
<http://www.gnuplot.info>  
Distribuido livremente.
- [3] Lang, Serge *Estruturas Algébricas*  
ou um outro livro qualquer de Álgebra
- [4] Nachbin, Leopoldo -  
*Introdução à Álgebra*  
ou um outro livro qualquer de Álgebra
- [5] Schetchman, W. et alli  
**Maxima** Um programa de computação algébrica  
<http://www.maxima.org>  
Distribuido sob GPL
- [6] Guido van Rossum et allii  
*Python, uma linguagem de programação*  
<http://www.python.org>
- [7] Praciano-Pereira, T *Cálculo Avançado* - Publicação Preliminar - Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS - 1998  
<http://www.4shared.com/file/18104572/4d05bd7e/avancado.html>
- [8] Praciano-Pereira, T *Programas para Cálculo Numérico - programas.tgz*  
<http://www.4shared.com/dir/2041165/e14cc331/programas.html>

[9] Grupo do Scilab no INRIA

**Scilab** Um programa para fazer Álgebra Linear computacionalmente -  
Cálculo Numérico

<http://www.scilab.org>

Distribuido sob GPL

[10] Paul R. Wolfson *The crooked made stright: Roberval and Newton on tangents*

The American Mathematical Monthly Vol 108, nº3 pag 206-216 - 2001